

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии



Семенов Е.М.

25.05.2023 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.О.14 Комплексный анализ**

- 1. Код и наименование направления:** 01.03.04 Прикладная математика
- 2. Профиль:** Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр.
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра теории функций и геометрии
- 6. Составители программы:**  
Шабров С.А. – доктор физ.-мат. наук, профессор;  
Стенюхин Л.В. – кандидат физ.-мат. наук, доцент.
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета  
протокол № 0500-06 от 25.05.2023 г.
- 8. Учебный год:** 2024/2025 **Семестр:** 4

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются :

- фундаментальная подготовка студентов в области теории функций комплексного переменного;
- овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях и для изучения таких дисциплин как уравнения математической физики, функциональный анализ, специальные разделы алгебраической топологии, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория вероятностей, вычислительная математика, прикладные дисциплины (гидро- и аэромеханика, теория упругости, теория автоматического регулирования).

Задачи учебной дисциплины:

- изучение основных понятий, определений и теорем теории функций комплексного переменного;
- овладение навыками применения методов ТФКП для решения математических и физических задач.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина Комплексный анализ относится к обязательной части Блока 1. Дисциплина «Комплексный анализ» базируется на знаниях, полученных в рамках школьного курса «Математика» или соответствующих математических дисциплин среднего профессионального образования, использующих соответствующие количественные методы, а также курсов математического анализа и логики.

Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки является основанием для успешного изучения как дальнейших базовых курсов – функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, так и специальных курсов, а так же могут быть полезны в научно-исследовательской работе.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1.	Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ОПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать: - базовые понятия и положения, полученные в области математических и (или) естественных наук.
		ОПК-1.2.	Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.	Уметь: - использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.
		ОПК-1.3.	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Владеть: - навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. —  
5/ 180.

Форма промежуточной аттестации - экзамен.

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			4 семестр	
Аудиторные занятия		84	84	
в том числе:	лекции	34	34	
	практические	50	50	
	лабораторные			
Самостоятельная работа		60	60	
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации - экзамен – 36 час.		36	36	
Итого:		180	180	

#### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Комплексные числа. Комплексная плоскость.	Комплексные числа, комплексная плоскость; модуль и аргумент комплексного числа, их свойства; числовые последовательности и их пределы, ряды; стереографическая проекция, ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость; множества на плоскости, области и кривые.	
1.2	Функции комплексного переменного и отображения множеств.	Функции комплексного переменного; предел функции; непрерывность, модуль непрерывности; дифференцируемость по комплексному переменному, условия Коши-Римана; аналитическая функция; геометрический смысл аргумента и модуля производной; понятие о конформном отображении.	
1.3	Элементарные функции.	Целая линейная и дробно-линейная функции, их свойства, общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг; экспонента и логарифм, степень с произвольным показателем; понятие о римановой поверхности на примерах логарифмической и общей степенной функций; функция Жуковского; тригонометрические и гиперболические функции.	
1.4	Интеграл по комплексному переменному.	Интеграл по комплексному переменному, его простейшие свойства, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода; сведение к интегралу по действительному переменному; первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница; переход к пределу под знаком интеграла; интегральная теорема Коши.	

1.5	Интеграл Коши.	Интегральная формула Коши; бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных; теорема Мореры.	
1.6	Последовательности и ряды аналитических функций.	Последовательности и ряды аналитических функций в области: теорема Вейерштрасса; степенные ряды; теорема Абеля, формула Коши-Адамара; разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения; неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда; действия со степенными рядами	
1.7	Теорема единственности и принцип максимума модуля.	Нули аналитической функции, порядок нуля; теорема единственности для аналитических функций; принцип максимума модуля и лемма Шварца.	
1.8	Ряд Лорана.	Ряд Лорана, область его сходимости; разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения; неравенства Коши для коэффициентов; теорема Лиувилля и теорема об устранимой особой точке.	
1.9	Изолированные особые точки однозначного характера.	Классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенно особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара; бесконечно удаленная точка как особая.	
1.10	Вычеты, принцип аргумента.	Определение вычета, теоремы Коши о вычетах, вычисления вычетов; применения вычетов; логарифмический вычет, принцип аргумента; теорема Руше и теорема Гурвица.	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Комплексные числа. Комплексная плоскость.	Комплексные числа, комплексная плоскость; модуль и аргумент комплексного числа, их свойства; числовые последовательности и их пределы, ряды; стереографическая проекция, ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость; множества на плоскости, области и кривые.	
2.2	Функции комплексного переменного и отображения множеств.	Функции комплексного переменного; предел функции; непрерывность, модуль непрерывности; дифференцируемость по комплексному переменному, условия Коши-Римана; аналитическая функция; геометрический смысл аргумента и модуля производной; понятие о конформном отображении.	
2.3	Элементарные функции.	Целая линейная и дробно-линейная функции, их свойства, общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг; экспонента и логарифм, степень с произвольным показателем; понятие о римановой поверхности на примерах логарифмической и общей степенной функций; функция Жуковского; тригонометрические и гиперболические функции.	
2.4	Интеграл по комплексному переменному.	Интеграл по комплексному переменному, его простейшие свойства, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода; сведение к интегралу по действительному переменному; первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница; переход к пределу под знаком интеграла; интегральная теорема Коши.	

2.5	Интеграл Коши.	Интегральная формула Коши; бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных; теорема Мореры.	
2.6	Последовательности и ряды аналитических функций.	Последовательности и ряды аналитических функций в области: теорема Вейерштрасса; степенные ряды; теорема Абеля, формула Коши-Адамара; разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения; неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда; действия со степенными рядами	
2.7	Ряд Лорана.	Ряд Лорана, область его сходимости; разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения; неравенства Коши для коэффициентов; теорема Лиувилля и теорема об устранимой особой точке.	
2.8	Изолированные особые точки однозначного характера.	Классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенно особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара; бесконечно удаленная точка как особая.	
2.9	Вычеты, принцип аргумента.	Определение вычета, теоремы Коши о вычетах, вычисления вычетов; применения вычетов; логарифмический вычет, принцип аргумента; теорема Руше и теорема Гурвица.	
2.10	Теорема единственности и принцип максимума модуля.	Нули аналитической функции, порядок нуля; теорема единственности для аналитических функций; принцип максимума модуля и лемма Шварца.	
2.11	Отображения посредством аналитических функций.	Принцип открытости и принцип области; теорема о локальном обращении; однолистные функции, критерий локальной однолистности и критерий конформности в точке, достаточное условие однолистности (обратный принцип соответствия границ); дробно-линейность однолистных конформных отображений круговых областей друг на друга; теорема Римана (без доказательства) и понятие о соответствии границ при конформном отображении.	
2.12	Аналитическое продолжение.	Аналитическое продолжение по цепи и по кривой; полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса, ее риманова поверхность и особые точки; теорема о монодромии; аналитическое продолжение через границу области, принцип симметрии. Целые и мероморфные функции: целые функции, их порядок и тип; произведение Вейерштрасса; мероморфные функции; функции, мероморфные в расширенной плоскости.	
2.13	Гармонические функции.	Гармонические функции на плоскости, их связь с аналитическими функциями; бесконечная дифференцируемость гармонических функций; аналитичность комплексно сопряженного градиента; теорема о среднем, теорема единственности и принцип максимума-минимума; инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных; теорема Лиувилля и теорема Харнака об устранимой особой точке; интегралы Пуассона и Шварца; разложение гармонических функций в ряды,	

		связь с тригонометрическими рядами; задача Дирихле, применение конформных отображений для ее решения; гидромеханическое истолкование гармонических и аналитических функций.	
--	--	---	--

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Комплексные числа. Комплексная плоскость	6	4	-	4	14
2	Функции комплексного переменного и отображение множеств	6	6	-	4	16
3	Элементарные функции	4	6	-	4	14
4	Интеграл по комплексному переменному.	2	4	-	6	12
5	Интеграл Коши.	2	4	-	6	12
6	Последовательности и ряды аналитических функций.	4	6	-	4	14
7	Теорема единственности и принцип максимума модуля.	0	2	-	4	6
8	Ряд Лорана.	2	4	-	6	12
9	Изолированные особые точки однозначного характера.	2	2	-	6	10
10	Вычеты, принцип аргумента.	6	4	-	4	14
11	Отображения посредством аналитических функций.	0	4	-	4	8
12	Аналитическое продолжение.	0	2	-	4	6
13	Гармонические функции.	0	2	-	4	6
14	Экзамен					36
Итого		34	50	-	60	180

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях излагаются ключевые и проблемные вопросы дисциплины. Проведение практических занятий направлено на закрепление теоретических знаний, умение применять их при решении практических задач. Для успешного и качественного освоения дисциплины необходима планомерная, повседневная самостоятельная работа,

При изучении курса «Комплексный анализ» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Обращать внимание на определения, формулировки теорем, научные выводы и практические рекомендации. Для понимания и качественного усвоения учебного материала рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции рекомендуется подробно разобрать теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей.

2. Важной составной частью освоения дисциплины являются практические занятия, которые требуют помимо знаний теоретического материала еще и навыков решения практических задач, что помогает глубже усвоить учебный материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

При подготовке к практическим занятиям следует повторить основные понятия по темам, рассмотреть примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Намечить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к ответам на все теоретические вопросы рассматриваемой темы. С целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций следует задавать преподавателю уточняющие вопросы.

3. Работа с основной и дополнительной литературой по дисциплине в библиотеке или в системе «Электронный университет».

4. Рекомендуется ознакомиться с настоящей Рабочей программой дисциплины.

При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и регулярную самостоятельную учебную деятельность в течении семестра: изучение, рекомендуемой литературы, самостоятельное освоение понятийного аппарата, подготовку к практическим занятиям, выполнение индивидуальных заданий, подготовку к экзамену.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Для успешной самостоятельной работы необходим тесный контакт с преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

### а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<i>Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат - М: Наука, 2002. - 736 с.</i>
2	<i>Свешников А.Г. Теория функций комплексного переменного / А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов - М.: Наука, 2001. - 320 с.</i>
3	<i>Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для студ.вузов / Л.И. Волковыский, Г.Л.Луниц, И.Г.Араманович. - 4-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2002. - 312 с.</i>
4	<i>Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного //Изд-во «Лань»: ЭБС. – URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/322#book_name">https://e.lanbook.com/book/322#book_name</a></i>

### б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	<i>Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич - М.: Наука, 1978. - 388 с.</i>
6	<i>Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А.Евграфов. - М.: Наука, 1965. - 424 с.</i>
7	<i>Сборник задач по теории аналитических функций / М.А.Евграфов, К.А.Бежанов, Ю.В.Сидоров и др.; Под ред. М.А.Евграфова - М.: Наука, 1972. - 286 с.</i>
8	<i>Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожеевникова. - М.: Высшая школа, 1997. - Ч.2. - 416 с.</i>

**в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:**

№ п/п	Источник
9	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного //Изд-во «Лань»: ЭБС. – URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/322#book_name">https://e.lanbook.com/book/322#book_name</a>
10	<a href="http://www.math.vsu.ru">http://www.math.vsu.ru</a> – официальный сайт математического факультета ВГУ
11	<a href="http://www.math.msu.ru">http://www.math.msu.ru</a> – официальный сайт мехмата МГУ
12	<a href="http://e.lanbook.com">e.lanbook.com</a>

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы**

Курс построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Студент может дополнить список использованной литературы иными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых и дипломных работ.

№ п/п	Источник
1	Волковыцкий Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для студ.вузов/ Л.И. Волковыцкий, Г.Л.Луниц, И.Г.Араманович. - 4-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2002. - 312 с.

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

Изложение учебного материала основано на принципе системности, преемственности и последовательности и направлено на развитие интеллектуальных умений, профессиональных компетенций, формирование творческой личности высококвалифицированного специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Важнейшая цель преподавателя – систематизация большого объема теоретического материала и обучение студента умению ориентироваться в этом материале.

Рекомендуется использование, как традиционных форм организации лекционного материала, так и внедрение таких интерактивных технологий, как проблемная лекция, когда знания вводятся как «неизвестное», которое необходимо «открыть».

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460>).

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Для проведения лекционных и практических занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации используется учебная аудитория: специализированная мебель.

Для самостоятельной работы обучающихся – компьютерный класс, оснащенный оргтехникой, необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями, законодательно-правовой нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть:

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop>); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/>); LibreOffice (GNU Lesser



General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/> ); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.lazarus-ide.org/index.php> ); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.freepascal.org/faq.html> ); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://docs.python.org/3/license.html> ); 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.gimp.org/about/> ); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://inkscape.org/about/license/> ); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://miktex.org/copying> ); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://texstudio.org/> ); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://maxima.sourceforge.net/faq.html> ); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <http://www.denwer.ru/faq/other.html> ); 1С: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions\\_licence.htm](https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm) ); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://www.foxitsoftware.com/pdfreader/eula.html> ); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf> ); WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://windjview.sourceforge.io/ru/> ); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.7-zip.org/license.txt> ); Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.mozilla.org/en-US/MPL/> ); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.vmware.com/download/open\\_source.html](https://www.vmware.com/download/open_source.html) ); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: [https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing\\_FAQ](https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ) ); Astra Linux Common Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/> ); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.postgresql.org/about/licence/> ); GeoGebra (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.geogebra.org/license> ); R (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.r-project.org/Licenses/> ); Wing-101 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://wingware.com/license/wing101> ); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://loginom.com/platform/pricing> ); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://downloads.mysql.com/docs/licenses/>)

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций:

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Комплексные числа. Комплексная плоскость.	ОПК-1.	ОПК-1.1., ОПК-1.2., ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
2.	Функции комплексного переменного и отображения множеств.	ОПК-1.	ОПК-1.1., ОПК-1.2., ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
3.	Элементарные функции.	ОПК-1.	ОПК-1.1., ОПК-1.2., ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
4.	Интеграл по комплексному переменному.	ОПК-1.	ОПК-1.1., ОПК-1.2., ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
5.	Интеграл Коши.	ОПК-1.	ОПК-1.1., ОПК-1.2., ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
6.	Последовательности и ряды аналитических функций.	ОПК-1.	ОПК-1.1., ОПК-1.2., ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
7.	Теорема единственности и принцип максимума модуля.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
8.	Ряд Лорана.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
9.	Изолированные особые точки однозначного характера.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
10.	Вычеты, принцип аргумента.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание
11.	Отображения посредством аналитических функций.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
12.	Аналитическое продолжение.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	Устный опрос. Практическое задание.
13.	Гармонические функции.	ОПК-1.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	Итоговая контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				Вопросы к экзамену

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Оценка знаний, умений, навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущего контроля в форме устного опроса, проверки выполнения решений практических заданий и контрольной работы

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### Примерный перечень вопросов к практическим занятиям

1. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция. Сфера Римана.
2. Линейная функция комплексного переменного.
3. Функция  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Образ окружности  $|z - z_0| = R$  при отображении этой функцией.
4. Дробно-линейная функция. Структура отображения, задаваемого дробно-линейной функцией.
5. Показательная функция комплексного переменного. Комплексный логарифм.
6. Определение и простейшие свойства.
7. Тригонометрические функции комплексного переменного. Определения и простейшие свойства.
8. Гиперболические функции комплексного переменного. Определения и простейшие свойства.
9. Отображение плоскости посредством функции  $e^z$ .
10. Дифференцируемость функций в смысле комплексного анализа. Производная и дифференциал. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции в точке.
11. Теорема Коши-Римана.
12. Следствия из теоремы Коши-Римана. Гармонические функции. Сопряженные гармонические функции.
13. Интеграл от комплекснозначной функции действительного переменного. Модуль интеграла и оценка модуля интеграла.
14. Определение и простейшие свойства интеграла от функции комплексного переменного по кривой.
15. Оценка интеграла.
16. Аппроксимация интеграла интегральной суммой.
17. Аппроксимация интеграла по кривой интегралом по ломаной.
18. Теорема Коши-Гурса.
19. Теорема Коши-Гурса для многосвязной области.
20. Независимость интеграла от вида пути интегрирования.
21. Первообразная функция. Формула Ньютона-Лейбница.
22. Вывод интегральной формулы Коши.
23. Лемма о дифференцировании интеграла по параметру.
24. Интегральные формулы Коши для производных голоморфной функции. Следствие о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции.
25. Формула Тейлора.
26. Оценки производных голоморфной функции. Неравенства Коши.
27. Теорема Лиувилля.
28. Первая теорема единственности.
29. Нуль функции, кратность нуля. Представление голоморфной функции в окрестности нуля.
30. Изолированность нулей голоморфной функции.
31. Вторая теорема единственности. Следствие.
32. Последовательности голоморфных функций. Первая теорема Вейерштрасса.
33. Топология в пространстве голоморфных функций. Вторая теорема Вейерштрасса. Теорема Монтеля (без доказательства).
34. Ряды голоморфных функций. Почленное дифференцирование и интегрирование.
35. Степенные ряды. Теорема Абеля. Формулы для коэффициентов.
36. Свойство круга сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.
37. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.
38. Ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.

39. Разложение функций, голоморфных в кольце, в ряд Лорана.
40. Особые точки. Виды особых точек.
41. Вычет функции в точке. Теорема Коши о вычетах.
42. Формула Лорана.
43. Вычисление вычета в полюсе. Частные случаи.
44. Голоморфность и особенности на бесконечности.
45. Разложение в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки.
46. Вычет функции на бесконечности. Теорема Коши о полной сумме вычетов.

47. Простейшие типы несобственных интегралов. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ .

48. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$ . Лемма Жордана.

49. Логарифмическая функция. Точка логарифмического ветвления.
50. Степенная функция с произвольным показателем степени. Точка алгебраического ветвления.
51. Логарифмическая производная и ее свойства.
52. Поле мероморфных функций. Приращение логарифма мероморфной функции.
53. Принцип аргумента.
54. Теорема Руше.
55. Основная теорема алгебры.
56. Теорема Гурвица о нулях последовательности голоморфных функций.
57. Принцип максимума модуля.
58. Лемма Шварца.
59. Дополнение к лемме Шварца.

### Примерный перечень практических заданий

1. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z)$ :  

$$D = \left\{ z : |z| > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0 \right\}; \quad w = z^2.$$
2. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z)$ :  

$$D = \left\{ z : |z| = 2; \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}; \quad w = z^4.$$
3. Может ли функция быть дифференцируемой в точке  $z_0$  и не быть голоморфной в этой точке? Может ли функция, голоморфная в области, быть суммой двух функций, не голоморфных в этой области?
4. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении  $w = e^z$ .
5. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении  $w = \ln z$ .
6. Для функции  $f(z) = \sin \bar{z}$  указать точки, в которых существует производная  $f'(z)$ , и найти эту производную.
7. Вычислить  $\operatorname{th} \left( \ln 3 + \frac{\pi i}{4} \right)$ .
8. Вычислить  $\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - i \ln 2 \right)$ .
9. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{1}{1+it} dt$ .

10. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt$ .

11. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \bar{z} e^z dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = 1$  до точки  $z_2 = i$ .

12. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \cos \bar{z} dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = \pi$  до точки  $z_2 = \frac{\pi}{2} + i$ .

13. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} z^2 \cos z dz$ , где  $\gamma$  – отрезок прямой от точки  $z_1 = i$  до точки  $z_2 = 1$ .

14. Найти нули функции  $f(z) = 1 + \cos z$  и определить их кратности.

15. Найти кратность нуля  $z_0 = 0$  для функции  $f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$ .

16. Пусть  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ . Следует ли из этого, что  $f(z)$  – аналитическая функция внутри замкнутой кривой  $\gamma$ ?

17. Вычислить интеграл  $\oint_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^2} dz$ .

18. Найти радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ .

19. Найти радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$ .

20. Функцию  $f(z) = \frac{1}{3-2z}$  разложить по степеням разности  $z-3$ .

21. Функцию  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$  разложить в ряд по степеням  $z$  и найти область сходимости полученного ряда.

22. Может ли разложение некоторой функции в ряд Лорана по степеням разности  $z-z_0$  содержать:

- а) конечное число слагаемых с отрицательными степенями этой разности;
- б) конечное число слагаемых с положительными степенями этой разности;
- в) бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями этой разности;
- г) бесконечное число слагаемых с положительными степенями этой разности?

### Примерное содержание заданий итоговой контрольной работы

1. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z)$ :

$$D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}; \operatorname{Re} z > 0 \right\}; w = e^{2z}.$$

2. Найти образ области  $D$  при отображении функцией  $w = f(z) : D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}$ ;  
 $w = \operatorname{ctg} z$ .
3. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz$ , где  $\gamma$  – линия, соединяющая точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 + 2i$ ,  
 а) отрезок прямой;  
 б) дуга параболы;  
 в) ломаная  $z_1 z_3 z_2$ , где  $z_3 = 1$ .  
 Почему получаются разные ответы?
4. Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz$ , где  $\gamma$ :  
 а) отрезок прямой от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ ;  
 б) дуга параболы  $y = 2x^2$  от точки  $z_1 = 0$  до точки  $z_2 = 1 + 2i$ . Почему получаются разные ответы?
5. Существует ли функция, аналитическая в точке  $z = 0$  и принимающая в точках  $z = \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) значения:  
 а)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, \dots$ ;  
 б)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ ?
6. Функция  $\sin \frac{1}{1-z}$  имеет бесконечную последовательность нулей, сходящуюся к точке 1, но тем не менее эта функция отлична от постоянной. Не противоречит ли это теореме единственности?
7. Вычислить интеграл  $\int_{2i-\infty}^{2i+\infty} \frac{z \sin zt}{z^2 + 1} dz, t > 0$ .
8. Вычислить интеграл  $\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{z \cos zt}{(z+1)^2} dz, t > 0$ .

#### Описание технологии проведения

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением опросов по теоретическому материалу, выполнением практических заданий и заданий итоговой контрольной работы.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено». Систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний обучающихся.

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении текущего контроля успеваемости используются следующие

**показатели:**

- 1) знание основных понятий и определений;
- 2) умение использовать стандартные методы для решения типовых задач;
- 3) оптимальность хода решения;
- 4) логика изложения, рассуждений;
- 5) правильность выполнения расчетов;
- 6) самостоятельность выводов.

**Критерии оценки компетенций (результатов обучения) при текущей аттестации:**

Зачтено: выполнение практических заданий, контрольной работы и ответы в ходе опроса соответствуют перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, возможно с некоторыми ошибками. Выполнение заданий контрольной работы соответствуют перечисленным показателям. Более половины заданий контрольной работы выполнены верно.

Незачтено: в ходе опроса ответы обучающегося не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие. Половина и более половины заданий контрольной работы выполнены не верно.

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования. Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины и проводится в форме экзамена.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### Перечень вопросов к экзамену

1. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция. Сфера Римана.
2. Линейная функция комплексного переменного.
3. Функция  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Образ окружности  $|z - z_0| = R$  при отображении этой функцией.
4. Дробно-линейная функция. Структура отображения, задаваемого дробно-линейной функцией.
5. Показательная функция комплексного переменного. Комплексный логарифм. Определение и простейшие свойства.
6. Тригонометрические функции комплексного переменного. Определения и простейшие свойства.
7. Гиперболические функции комплексного переменного. Определения и простейшие свойства.
8. Отображение плоскости посредством функции  $e^z$ .
9. Дифференцируемость функций в смысле комплексного анализа. Производная и дифференциал. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции в точке.
10. Теорема Коши-Римана.
11. Следствия из теоремы Коши-Римана. Гармонические функции. Сопряженные гармонические функции.

12. Интеграл от комплекснозначной функции действительного переменного. Модуль интеграла и оценка модуля интеграла.
13. Определение и простейшие свойства интеграла от функции комплексного переменного по кривой.
14. Оценка интеграла.
15. Аппроксимация интеграла интегральной суммой.
16. Аппроксимация интеграла по кривой интегралом по ломаной.
17. Теорема Коши-Гурса.
18. Теорема Коши-Гурса для многосвязной области.
19. Независимость интеграла от вида пути интегрирования.
20. Первообразная функция. Формула Ньютона-Лейбница.
21. Вывод интегральной формулы Коши.
22. Лемма о дифференцировании интеграла по параметру.
23. Интегральные формулы Коши для производных голоморфной функции. Следствие о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции.
24. Формула Тейлора.
25. Оценки производных голоморфной функции. Неравенства Коши.
26. Теорема Лиувилля.
27. Первая теорема единственности.
28. Нуль функции, кратность нуля. Представление голоморфной функции в окрестности нуля.
29. Изолированность нулей голоморфной функции.
30. Вторая теорема единственности. Следствие.
31. Последовательности голоморфных функций. Первая теорема Вейерштрасса.
32. Топология в пространстве голоморфных функций. Вторая теорема Вейерштрасса. Теорема Монтеля (без доказательства).
33. Ряды голоморфных функций. Почленное дифференцирование и интегрирование.
34. Степенные ряды. Теорема Абеля. Формулы для коэффициентов.
35. Свойство круга сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.
36. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.
37. Ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.
38. Разложение функций, голоморфных в кольце, в ряд Лорана.
39. Особые точки. Виды особых точек.
40. Вычет функции в точке. Теорема Коши о вычетах.
41. Формула Лорана.
42. Вычисление вычета в полюсе. Частные случаи.
43. Голоморфность и особенности на бесконечности.
44. Разложение в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки.
45. Вычет функции на бесконечности. Теорема Коши о полной сумме вычетов.
46. Простейшие типы несобственных интегралов. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ .
47. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$ . Лемма Жордана.
48. Логарифмическая функция. Точка логарифмического ветвления.
49. Степенная функция с произвольным показателем степени. Точка алгебраического ветвления.
50. Логарифмическая производная и ее свойства.
51. Поле мероморфных функций. Приращение логарифма мероморфной функции.
52. Принцип аргумента.
53. Теорема Руше.
54. Основная теорема алгебры.



55. Теорема Гурвица о нулях последовательности голоморфных функций.  
 56. Принцип максимума модуля.  
 57. Лемма Шварца.  
 58. Дополнение к лемме Шварца.

#### Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация по дисциплине преследует цель оценить работу обучающихся за курс, полученные обучающимися знания, умения и уровень приобретенных компетенций, их прочность, развитие творческого мышления, приобретение навыков самостоятельной работы, умение синтезировать полученные знания и применять их при решении практических задач.

Экзамен проводится в форме собеседования с преподавателем. Обучающийся получает два теоретических вопроса на знание понятий и определений, формулировок и доказательств утверждений и задачу из перечня практических заданий. По результатам ответа выставляется оценка по пятибалльной шкале.

Время подготовки к ответу не должно превышать одного астрономического часа. При необходимости, в ходе ответа преподаватель может задавать уточняющие и дополнительные вопросы.

При проведении промежуточной аттестации в форме экзамена используются следующие **показатели**:

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом комплексного анализа;
- 2) логика изложения
- 3) корректность формулировок и доказательств утверждений и теорем;
- 4) умение связывать теорию с практикой;
- 5) умение иллюстрировать ответ примерами;
- 6) умение применять формулы, решать задачи.

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области комплексного анализа, корректно формулирует и доказывает утверждения, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач в области комплексного анализа	Повышенный уровень	Отлично
Ответ обучающегося не соответствует одному (двум) из перечисленных показателей, но студент дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ обучающегося не соответствует любым двум(трем) из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичные знания, или имеет не полное представление понятий комплексного анализа, допускает существенные ошибки в решении задач	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ обучающегося не соответствует любым четырем и более из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки, не умеет решать задачи.	–	Неудовлетворительно

## 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

### 1) Тестовые задания

- Задания закрытого типа - средний уровень сложности

#### Test1

Корнями уравнения  $x^3 + 36x$  над полем комплексных чисел являются ...

1)  $-6i$ ;      3)  $6i$ ;      5)  $0$ .

2)  $-6$ ;      4)  $6$ ;

#### Test2

Число  $i^{2021}$  равно

1)  $-i$ ;    2)  $-1$ ;    3)  $i$ ;      4)  $1$ .

#### Test3

Мнимая часть частного  $\frac{4}{1+i}$  равна

1)  $-2$ ;    2)  $-4$ ;    3)  $2$ ;      4)  $4$ .

#### Test4

Если функция  $w(z) = u(x, y) + v(x, y)$  голоморфна в области комплексной плоскости. Тогда её производная вычисляется по формуле

1)  $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y}$ ;

2)  $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y}$ ;

3)  $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ ;

4)  $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ .

#### Test5

Какие функции дифференцируемы в смысле комплексного анализа на всей комплексной плоскости

1)  $e^z \cos z$ ;    2)  $e^z \operatorname{tg} z$ ;    3)  $\frac{\sin z}{e^z}$ ;    4)  $\frac{e^z}{\sin z}$ .

- Задания открытого типа (короткий ответ)

#### Test6

Функция является голоморфной в точке тогда и только тогда, когда в этой точке выполнены условия ...

Ответ: Коши-Римана

### Test7

Напишите пропущенное число  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \dots$

Ответ: 1

### Test8

Напишите пропущенное число  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^2} = \dots$

Ответ: 0

### Test9

Вычет в любой точке голоморфной функции равен ... (напишите число).

Ответ: 0

### Test10

Для функций комплексного переменного могут существовать три вида особых точек: устранимая особая точка, ... и существенно особая точка. Напишите пропущенное слово.

Ответ: полюс

**Верные ответы выделены цветом.**

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

1) Тестовые задания.

- Задания закрытого типа – средний уровень сложности (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

- Задания закрытого типа - средний уровень сложности (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- за каждый верный ответ ставится 1 балл, при этом за каждый неверный ответ вычитается 1 балл;
- 0 баллов — не выбрано ни одного верного ответа.

- Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- за каждое верное сопоставление ставится количество баллов, равное максимальному (2 балла), деленному на количество предлагаемых в вопросе сопоставлений;
- 0 баллов – ни одно сопоставление не выбрано верно.

- Задания открытого типа (короткий ответ):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

